Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 3

Die Exponentialapproximation.

Oder:

Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie lange dauert es bis zum ersten Erfolg?

(Buch S. 42)

Wieder sei

T

der zufällige Zeitpunkt des ersten Erfolgs

in einem fortgesetzten p-Münzwurf.

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = q^{2000} = \left(1 - \tfrac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

$$\mathbf{P}(T > 2 \cdot \mathbf{E}[T]) \quad \approx \quad e^{-2}$$

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > 2\right) \approx e^{-2}}$$

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\widetilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\widetilde{T} > t\} &= \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor\right)\\ &= \left(1 - p\right)^{\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor}\\ &= \left(1 - p\right)^{\frac{1}{p}\, p\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor}\end{aligned}$$

Für $p \to 0$ konvergiert dies gegen

$$(e^{-1})^t = e^{-t}.$$

Diese Tatsache formulieren wir als einen *Grenzwertsatz*:

(vgl. Buch S. 42)

Satz Sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}[T_m] \underset{m \to \infty}{\to} \infty.$$

Dann gilt für jedes $t \geq 0$:

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{T_m}{\mathbf{E}[T_m]} > t\right) \underset{m \to \infty}{\to} e^{-t}}$$